

Vorrei chiederti un aiuto per preparare alcuni contenuti per le mie lezioni di matematica e fisica al liceo. Affrontiamo la questione distanza. La distanza può essere sviluppata con l'insieme di grandezze lunghezze, oppure la misura delle lunghezze o con le coordinate o con l'integrale come misura... Partiamo dall'inizio ovvero dalla geometria elementare e postuliamo l'esistenza di quattro spazi: il punto, la retta, il piano e lo spazio di dimensione rispettivamente 0, 1, 2, 3. Vediamo come si costruiscono i sistemi di coordinate cartesiano come parti

La distanza: un percorso didattico dalla geometria elementare alle coordinate

Ti propongo un percorso strutturato in tappe, pensato per il triennio del liceo (o per un biennio avanzato). L'idea è costruire il concetto di **distanza** in modo assiomatico e progressivo, partendo dagli enti primitivi e arrivando alla sua espressione analitica.

Tappa 0 — Gli enti primitivi e gli spazi di dimensione n

Obiettivo: fissare il vocabolario geometrico di base.

Postuliamo l'esistenza di quattro **spazi** (insiemi di punti), ciascuno caratterizzato dalla propria dimensione:

Spazio	Dimensione	Descrizione intuitiva
Punto	0	ente senza dimensioni
Retta	1	ente che si estende in una sola direzione
Piano	2	ente che si estende in due direzioni indipendenti
Spazio	3	ente che si estende in tre direzioni indipendenti

Osservazione didattica: il *punto* è un ente primitivo, non definito, ma caratterizzato dagli assiomi (appartenenza, ordine, congruenza, continuità). Gli altri tre si costruiscono a partire da esso.

Tappa 1 — La coppia ordinata

Definizione (coppia ordinata). Dati due elementi a e b , si dice **coppia ordinata** l'oggetto (a, b) caratterizzato dalla proprietà fondamentale:
 $(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d.$

L'aggettivo *ordinata* è essenziale: $(a, b) \neq (b, a)$ in generale. Questo è il primo mattone per parlare di coordinate.

Nota storica/filosofica: si può dare la definizione insiemistica di Kuratowski $(a, b) := \{\{a\}, \{b\}\}$ oppure $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$, ma ai fini didattici è sufficiente la proprietà caratterizzante.

Tappa 2 — La n-pla ordinata e il prodotto cartesiano

Definizione (n-pla ordinata). Dati n elementi $a_1, a_2, \dots, a_n$, si dice **n-pla ordinata** l'oggetto

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

con la proprietà:

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \iff a_i = b_i \forall i = 1, \dots, n.$$

Definizione (prodotto cartesiano). Dati n insiemi $A_1, \dots, A_n$, si definisce $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$.

Caso particolare importantissimo: se $A_1 = \dots = A_n = \mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$$

Quindi:

- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ (retta reale)
- $\mathbb{R}^2$ (piano cartesiano)
- $\mathbb{R}^3$ (spazio cartesiano)

Attenzione didattica: $\mathbb{R}^n$ non è ancora "lo spazio geometrico": è un *modello algebrico*. Il legame con punto/retta/piano/spazio avviene tramite la corrispondenza biunivoca della tappa successiva.

Tappa 3 — Il sistema di coordinate cartesiane

Definizione (sistema di coordinate). Un **sistema di coordinate cartesiane** in uno spazio S di dimensione n è una corrispondenza biunivoca

$$\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che associa a ogni punto $P \in S$ una e una sola n -pla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, detta **coordinate** di P , e viceversa.

Proprietà della biunivocità:

- **iniettiva:** punti distinti hanno coordinate distinte;
- **suriettiva:** ogni n -pla di $\mathbb{R}^n$ individua un punto di S .

Il sistema si dice *cartesiano* (o *ortogonale*) quando gli assi sono mutuamente perpendicolari e si adotta la stessa unità di misura su tutti gli assi. Nel seguito supporremo sempre questa convenzione.

Casi particolari:

- $n = 1$: $\varphi : \text{retta} \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto x$ (ascissa).
- $n = 2$: $\varphi : \text{piano} \rightarrow \mathbb{R}^2, P \mapsto (x, y)$.
- $n = 3$: $\varphi : \text{spazio} \rightarrow \mathbb{R}^3, P \mapsto (x, y, z)$.

Tappa 4 — La distanza in geometria elementare (misura delle lunghezze)

Prima di passare alle coordinate, conviene ricordare come la distanza nasca come **grandezza** nella geometria euclidea.

Definizione (segmento e lunghezza). Dati due punti A e B , il segmento AB è l'insieme dei punti della retta AB compresi tra A e B . La sua **lunghezza** è la grandezza che si misura confrontandola con un segmento unitario u .

Assiomi della misura delle lunghezze:

1. **Non negatività:** $\overline{AB} \geq 0$, con uguaglianza se e solo se $A = B$.
2. **Simmetria:** $\overline{AB} = \overline{BA}$.

3. **Additività:** se C sta tra A e B , allora $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$.

4. **Invarianza per isometrie:** segmenti congruenti hanno la stessa lunghezza.

Definizione (distanza). La **distanza** tra A e B è la lunghezza del segmento AB , e si indica con $d(A, B) = \overline{AB}$.

Proprietà (metriche) che ritroveremo:

- $d(A, B) \geq 0$, con $=$ solo se $A = B$;
- $d(A, B) = d(B, A)$;
- $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (disuguaglianza triangolare).

Tappa 5 — La distanza in coordinate cartesiane

Ora traduciamo la distanza geometrica in linguaggio analitico, usando la biunivocità φ .

Caso $n = 1$

$$d(P, Q) = |x_Q - x_P|.$$

Caso $n = 2$

Dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo di cateti $|x_Q - x_P|$ e $|y_Q - y_P|$:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}.$$

Caso $n = 3$

Estensione naturale (doppia applicazione di Pitagora):

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}.$$

Caso generale $\mathbb{R}^n$

Definizione (distanza euclidea). Dati $P = (x_1, \dots, x_n)$ e $Q = (y_1, \dots, y_n)$:

$$d(P, Q) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}.$$

Verifica delle proprietà metriche:

- non negatività e annullamento: ovvia;
- simmetria: $(y_i - x_i)^2 = (x_i - y_i)^2$;
- disuguaglianza triangolare: è la disuguaglianza di Minkowski, conseguenza della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Tappa 6 — Cenni alla distanza come integrale (misura di lunghezze)

Per chiudere il cerchio, si può mostrare che la formula cartesiana è un caso particolare di una definizione più generale.

Lunghezza di una curva. Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 , la sua lunghezza è

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt, \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\gamma'_i(t))^2}.$$

Per il segmento $\gamma(t) = P + t(Q - P)$, $t \in [0, 1]$, si ha $\gamma'(t) = Q - P$ costante, quindi

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|Q - P\| dt = \|Q - P\| = d(P, Q).$$

Interpretazione: la distanza tra due punti è la lunghezza *minima* tra tutte le curve che li congiungono — e il segmento la realizza.

Schema riassuntivo del percorso

text

Enti primitivi (punto, retta, piano, spazio)

↓

Coppia ordinata $\rightarrow$ n-pla $\rightarrow \mathbb{R}^n$

↓

Corrispondenza biunivoca $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ (sistema di coordinate)

↓

Distanza geometrica (misura di lunghezze, assiomi)

↓

Distanza cartesiana $d(P,Q) = \sqrt{\sum (y_i - x_i)^2}$

↓

Distanza come integrale di $\|y'\|$ (generalizzazione)

Suggerimenti didattici

1. **Far "toccare" la biunivocità:** proporre agli studenti di associare a ogni punto del piano una coppia e viceversa, magari con una griglia fisica.
2. **Dimostrare Pitagora** prima di usarlo, oppure richiamarlo come prerequisito.
3. **Verificare le proprietà metriche** su esempi numerici in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
4. **Collegamento con la fisica:** la distanza è alla base di velocità media, spostamento vs spazio percorso, lavoro di una forza lungo un cammino.
5. **Estensione:** accennare che cambiando la norma (es. ℓ^1 , ℓ^∞) cambia la nozione di distanza — utile per far capire che "distanza" dipende dalla metrica scelta.

Vuoi che approfondisca una tappa in particolare (ad esempio la dimostrazione della disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}^n$, oppure esempi di esercizi per gli studenti)? Posso anche prepararti una versione in slide o una scheda di esercizi graduati.

Come esprimere in dimensione 1 che la distanza è una differenza di coordinate ed in valore assoluto? Tenendo conto che in algebra non c'è la differenza.+

La distanza in dimensione 1: dalla differenza al valore assoluto

Ottima osservazione: in algebra elementare (nei naturali $\mathbb{N}$, o anche negli interi $\mathbb{Z}$ visti come struttura algebrica) **non esiste l'operazione "differenza"** come operazione totale. Esiste la **somma** e, al più, l'**opposto**. La sottrazione $a - b$ è *definita* come $a + (-b)$, ma nei naturali $-b$ non esiste. Quindi bisogna costruire la distanza con cura.

1. Il problema algebrico di fondo

Nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, la **sottrazione è un'abbreviazione**:

$$a - b := a + (-b),$$

dove $-b$ è l'opposto additivo di b , cioè l'unico elemento tale che $b + (-b) = 0$.

Ma nei **naturali** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$:

- l'opposto non esiste (se non per lo 0);
- la sottrazione $a - b$ è definita solo se $a \geq b$;
- non è quindi un'operazione totale, né tantomeno simmetrica.

Quindi, se vogliamo definire la distanza in modo **algebricamente pulito**, dobbiamo o:

- **(A)** lavorare in $\mathbb{R}$ e usare l'opposto;
- **(B)** lavorare nei naturali e definire la distanza senza sottrazione;
- **(C)** introdurre il valore assoluto come operazione primitiva.

2. La distanza in $\mathbb{R}$ tramite l'opposto

Definizione. Dati $x, y \in \mathbb{R}$, si definisce

$$d(x, y) := |x - y| = |x + (-y)|.$$

Il **valore assoluto** è a sua volta definito per casi:

$$|t| := \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ -t & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Qui però stiamo usando il **confronto** ($\geq$) e l'**opposto** ($-t$): entrambe nozioni che in $\mathbb{R}$ sono disponibili perché $\mathbb{R}$ è un **campo ordinato**.

Proprietà chiave che rende il valore assoluto lo strumento giusto:

$$|x - y| = |y - x|,$$

cioè la distanza è **simmetrica**, anche se la sottrazione *non lo è* ($x - y \neq y - x$ in generale).

Questo è il punto didattico cruciale: il **valore assoluto "aggiusta" l'asimmetria della sottrazione**.

3. Perché serve il valore assoluto: interpretazione

Senza valore assoluto, $x - y$ dipende dall'ordine:

- se $x > y$, allora $x - y > 0$;
- se $x < y$, allora $x - y < 0$.

Ma la distanza tra due punti **non deve dipendere dall'ordine** con cui li nomino. Il valore assoluto elimina questa dipendenza:

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x < y \end{cases}$$

ovvero, equivalentemente:

$$d(x, y) = \max\{x - y, y - x\}.$$

Questa scrittura è già più "algebrica": usa solo somma, opposto e confronto, evitando di far dipendere la definizione da un'operazione non totale.

4. L'alternativa nei naturali: la distanza senza sottrazione

Se vogliamo restare in $\mathbb{N}$ (dove la sottrazione non è totale), possiamo definire la distanza in modo **assiomatico** o **ricorsivo**.

Approccio assiomatico (geometrico). La distanza è una funzione

$$d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

che soddisfa:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (disuguaglianza triangolare).

Approccio costruttivo. Si può definire per casi, usando solo il confronto:

$$d(x, y) := \begin{cases} x - y & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x < y \end{cases}$$

dove però la sottrazione è ora **lecita** in ciascun ramo, perché nel primo ramo $x \geq y$ garantisce che $x - y \in \mathbb{N}$.

Questa è la definizione **ricorsiva** o **per casi** della distanza in $\mathbb{N}$: ogni ramo usa una sottrazione che è definita perché il minuendo è maggiore o uguale al sottraendo.

5. Il ruolo del valore assoluto come "distanza dallo zero"

Un modo elegante di presentare la cosa:

Il **valore assoluto** $|x|$ è la distanza di x dallo zero: $|x| = d(x, 0)$.

Allora la distanza tra x e y è la distanza dalla loro differenza allo zero:

$$d(x, y) = |x - y| = d(x - y, 0).$$

Questa è una **traslazione**: la distanza è invariante per traslazioni. Formalmente:

$$d(x, y) = d(x - y, 0).$$

Questo fatto è la base della struttura di **spazio vettoriale normato**: la distanza è indotta da una **norma** $\|\cdot\|$ tramite

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

In $\mathbb{R}$ (e in $\mathbb{R}^n$) la norma è $\|t\| = |t|$ (risp. $\|t\| = \sqrt{\sum t_i^2}$).

6. Sintesi didattica: come presentarlo in classe

Passo 1 — Nei naturali. Definire la distanza *per casi*, usando solo il confronto e la sottrazione parziale:

$$d(x, y) := \begin{cases} x - y & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x < y \end{cases}$$

Far notare che ogni ramo è ben definito e che $d(x, y) = d(y, x)$.

Passo 2 — Passaggio a $\mathbb{R}$. Poiché in $\mathbb{R}$ ogni numero ha un opposto, la sottrazione è totale. Si può allora scrivere in modo compatto:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad |t| := \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ -t & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Passo 3 — Interpretazione geometrica. Sulla retta reale, $|x - y|$ è la lunghezza del segmento di estremi x e y ; il valore assoluto "raddrizza" il segno.

Passo 4 — Generalizzazione. In $\mathbb{R}^n$:

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

dove ogni $(x_i - y_i)^2$ sostituisce il valore assoluto in dimensione 1 (infatti $\sqrt{t^2} = |t|$).

7. Una nota importante sul linguaggio

Quando dici "in algebra non c'è la differenza", hai ragione a **livello strutturale**: in un gruppo additivo $(G, +)$ non esiste un'operazione "-" primitiva; esiste solo la somma e

l'opposto. La scrittura $a - b$ è **notazione abbreviata** per $a + (-b)$.

Pertanto, la formulazione **algebricamente corretta** della distanza in dimensione 1 è:

Dati x, y in un campo ordinato $(K, +, \cdot, \leq)$, si definisce
 $d(x, y) := |x + (-y)|$,
 dove $|\cdot|$ è il valore assoluto definito per casi tramite l'ordine.

In $\mathbb{R}$ questo diventa semplicemente $d(x, y) = |x - y|$.

Se invece lavoriamo in $\mathbb{N}$, che non è un gruppo additivo, la definizione va data **per casi** (come sopra), oppure **assiomaticamente**, senza mai usare la sottrazione totale.

Vuoi che prepari una **scheda di esercizi** su questo punto specifico (distanza in $\mathbb{N}$ vs $\mathbb{Z}$ vs $\mathbb{R}$, con verifica delle proprietà metriche)? Oppure una **tabella comparativa** delle tre definizioni (naturali, interi, reali) da distribuire agli studenti?

Questa risposta è generate da IA. Controllarne l'accuratezza.

Ma come esprimere il legame tra distanza con le coordinate e misura di grandezza ?

Il legame tra distanza come grandezza e distanza come coordinata

Questa è forse la domanda più profonda di tutto il percorso, perché tocca il **ponte tra geometria e algebra**. Provo a costruirlo passo passo, distinguendo bene i tre livelli in gioco:

1. **livello fisico/geometrico**: la grandezza "lunghezza" con la sua misura;
2. **livello assiomatico**: la distanza come funzione d su uno spazio di punti;
3. **livello analitico**: la distanza espressa in coordinate.

Il legame tra (1) e (3) passa necessariamente attraverso (2), e la chiave è il concetto di **isometria** e di **unità di misura**.

1. La grandezza "lunghezza" e la sua misura

Una **grandezza** (nel senso del confronto e della misura) è un ente per cui ha senso:

- **confrontare** due esemplari (uguale / maggiore / minore);
- **sommare** due esemplari (ottenendo un esemplare della stessa specie);
- **suddividere** in parti uguali.

La **lunghezza** è la grandezza associata ai segmenti. Misurarla significa:

scegliere un segmento unitario u e determinare quante volte u (o sue parti) è contenuto nel segmento dato.

Formalmente, se AB è un segmento e u l'unità, la **misura** è il numero reale $\ell(AB)$ tale che

$$AB = \ell(AB) \cdot u$$

nel senso della grandezza. Questo $\ell(AB)$ è ciò che chiamiamo **lunghezza** (in quella unità).

Proprietà della misura (assiomi della grandezza):

1. $\ell(AB) \geq 0$, con $= 0$ sse $A = B$;

2. $\ell(AB) = \ell(BA)$ (simmetria dell'uguaglianza di segmenti);
3. se C è tra A e B : $\ell(AB) = \ell(AC) + \ell(CB)$ (additività);
4. $\ell(AB) = \ell(A'B')$ se i segmenti sono congruenti (invarianza per isometrie).

Questo è il livello **puramente geometrico**: nessuna coordinata, nessun numero "preferito", solo confronto e somma di grandezze.

2. La distanza come funzione su uno spazio di punti

Per parlare di "coordinate" abbiamo bisogno di un **modello** in cui i punti siano rappresentati da numeri. Il passaggio avviene così:

Definizione (distanza). Fissato uno spazio di punti S (retta, piano, spazio) dotato della struttura euclidea, si definisce

$d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $d(A, B) :=$ la misura di AB rispetto a u .

Qui $d(A, B)$ è un **numero reale**, ottenuto *misurando* il segmento AB con l'unità u .

Proprietà (che sono esattamente quelle della misura, tradotte in d):

1. $d(A, B) \geq 0$, con $= 0 \iff A = B$;
2. $d(A, B) = d(B, A)$;
3. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$;
4. d è invariante per isometrie di S .

A questo livello d è una **funzione geometrica**: non dipende da coordinate, ma solo dall'unità di misura scelta (cambiando u , tutti i valori si riscalano di un fattore costante).

3. Il ponte: le coordinate come "mappa isometrica"

Qui sta il punto cruciale. Un **sistema di coordinate cartesiane** non è una biunivocità qualsiasi: è una biunivocità che **rispetta la distanza**.

Definizione (isometria). Sia $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corrispondenza biunivoca. Si dice che φ è una **isometria** (o che è *compatibile con la struttura metrica*) se

$$d_{\mathbb{R}^n}(\varphi(A), \varphi(B)) = d_S(A, B) \quad \forall A, B \in S,$$

dove $d_{\mathbb{R}^n}$ è la distanza euclidea standard in $\mathbb{R}^n$.

In parole: **la distanza calcolata sulle coordinate coincide con la distanza misurata geometricamente**.

Solo se φ è una isometria possiamo scrivere

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i(B) - x_i(A))^2}$$

e **interpretare** il secondo membro come la misura della lunghezza di AB .

4. Schema logico del legame

Ecco il flusso concettuale, dal più concreto al più astratto:

text

GRANDEZZA "lunghezza"

| (confronto + somma + suddivisione)

▼

MISURA della lunghezza di un segmento → numero reale $\ell(AB)$

| (scelta dell'unità u)

▼

DISTANZA $d(A, B) := \ell(AB) : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

| (funzione geometrica, indipendente da coordinate)

▼

SISTEMA DI COORDINATE $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$

| (biunivocità)

▼

ISOMETRIA: $d_{\mathbb{R}^n}(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A,B)$

| (condizione che lega coordinate e grandezza)

▼

FORMULA CARTESIANA:

$$d(A,B) = \sqrt{\sum (x_i(B) - x_i(A))^2}$$

Il punto delicato è la **freccia centrale**: *non ogni sistema di coordinate è isometrico*. Per esempio, coordinate oblique (non ortogonali) o con unità diverse sui due assi danno una biunivocità che **non** preserva la distanza euclidea: la formula cartesiana standard non varrebbe più.

Quindi:

Il legame tra distanza e misura di grandezza è garantito dalla scelta di un sistema di coordinate che sia una isometria rispetto alla metrica euclidea.

5. Il ruolo dell'unità di misura

Facciamo attenzione a un punto spesso trascurato: la formula

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

presuppone che:

- sugli assi x e y sia stata scelta la **stessa unità di misura u** ;
- gli assi siano **ortogonali**.

Se l'unità sull'asse x fosse u_x e sull'asse y fosse u_y , la lunghezza geometrica sarebbe

$$\ell(AB) = \sqrt{(u_x \cdot \Delta x)^2 + (u_y \cdot \Delta y)^2},$$

dove $\Delta x = x_B - x_A$ è il numero di unità u_x , ecc. Solo ponendo $u_x = u_y = u$ si ottiene la formula standard.

Quindi la formula cartesiana **codifica implicitamente la scelta dell'unità di misura e dell'ortogonalità degli assi**. Questo è il modo in cui la "grandezza" entra nella formula: attraverso la **scelta delle coordinate come isometria**.

6. La proprietà di omogeneità (o "scaling")

Un'altra manifestazione del legame è la seguente. Se cambio l'unità di misura, passando da u a $u' = \lambda u$ (con $\lambda > 0$), allora:

- le coordinate si trasformano: $x' = x/\lambda$;
- la distanza calcolata con le nuove coordinate è $d' = d/\lambda$;
- ma la **grandezza geometrica AB** è la stessa: cambia solo il numero che la misura.

Questo è il senso dell'**omogeneità**: la distanza come grandezza è un **invariante geometrico**, mentre la sua misura numerica dipende dall'unità. La formula cartesiana è **omogenea di grado 1** rispetto al riscaldamento delle coordinate:

$$d(\lambda P, \lambda Q) = \lambda d(P, Q).$$

7. In sintesi: come dirlo agli studenti

Proposta di formulazione chiara:

La **lunghezza** è una grandezza geometrica: esiste indipendentemente dai numeri, e si misura confrontandola con un'unità.

La **distanza** è la funzione che a ogni coppia di punti associa la misura della loro lunghezza.

Le **coordinate cartesiane** sono un modo di etichettare i punti con numeri, scelto in modo che la distanza euclidea calcolata sulle coordinate **coincida** con la distanza misurata geometricamente.

La formula $d = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$ è dunque la **traduzione in linguaggio numerico** della misura della lunghezza, possibile solo grazie alla scelta di coordinate isometriche (assi ortogonali, stessa unità).

8. Un esempio concreto per fissare le idee

Prendiamo un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza 3 cm e 4 cm.

Geometricamente, misurando l'ipotenusa con un righello, troviamo 5 cm (teorema di Pitagora).

Ora scegliamo coordinate cartesiane con origine in un vertice, asse x lungo il cateto di 3 cm, asse y lungo il cateto di 4 cm, unità 1 cm su entrambi. Allora:

- vertici: $O = (0, 0)$, $A = (3, 0)$, $B = (0, 4)$;
- distanza AB calcolata: $\sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Il numero 5 **coincide** con la misura geometrica in cm. Ecco il legame: la formula cartesiana **riproduce** la misura della grandezza, perché le coordinate sono state scelte come isometria.

Se avessi scelto unità diverse (es. 1 cm su x e 2 cm su y), la formula standard avrebbe dato un valore sbagliato — segno che la biunivocità non era una isometria.

Vuoi che approfondisca:

- la dimostrazione che le coordinate cartesiane standard sono una isometria (via Pitagora)?
- il caso delle **coordinate oblique** e di come cambia la formula?
- il legame con la **norma** e gli **spazi metrici** in generale?

Nella realtà algebrica un insieme di grandezze ha la struttura di monoide assoluto, invece la distanza si applica ad un campo nel caso di $\mathbb{R}$ oppure spazio lineare nel caso generale di $\mathbb{R}^n$

Il quadro algebrico: grandezze come monoide, distanza su campo/spazio vettoriale

Stai mettendo a fuoco una distinzione strutturale molto importante. Provo a formalizzarla con precisione, perché è esattamente il punto in cui il linguaggio algebrico chiarisce quello geometrico.

1. L'insieme delle grandezze è un monoide (commutativo, con cancellazione)

Consideriamo un insieme $\mathcal{G}$ di grandezze **della stessa specie** (tutte lunghezze, tutte aree, tutte masse...). Su di esso sono definite:

- una **somma** $+$: $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ (mettere una grandezza dopo l'altra);
- un **confronto** $\leq$ (uguale/maggiore/minore);
- una **suddivisione** in n parti uguali (per $n \in \mathbb{N}$).

Le proprietà algebriche della somma:

1. **Associatività**: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2. **Commutatività**: $a + b = b + a$;
3. **Elemento neutro**: esiste $0 \in \mathcal{G}$ (grandezza nulla) con $a + 0 = a$;
4. **Legge di cancellazione**: $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ (equivalente all'ordine totale compatibile).

Dunque $(\mathcal{G}, +, 0)$ è un **monoide commutativo cancellativo** (in inglese *cancellative commutative monoid*). Nel tuo linguaggio: **monoide assoluto**, dove "assoluto" sottolinea che non ci sono inversi né elementi negativi — non esiste la grandezza "opposta" di una lunghezza.

Punto cruciale: in $\mathcal{G}$ **non esiste la sottrazione**. Non è un gruppo, è solo un monoide. Questo è esattamente il punto che avevi sollevato prima: in algebra elementare la differenza non c'è.

2. Dalla grandezza al numero: la misura come omomorfismo

Per passare da $\mathcal{G}$ ai numeri, si sceglie un'**unità** $u \in \mathcal{G}$ e si definisce la **misura** rispetto a u :

$$m_u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad m_u(g) := \frac{g}{u}$$

(il numero reale che esprime quante volte u sta in g).

m_u è un **omomorfismo di monoidi**:

- $m_u(g + h) = m_u(g) + m_u(h)$;
- $m_u(0) = 0$;
- è **strettamente crescente** rispetto all'ordine;
- è **iniettivo** (per la cancellazione).

Questo è il primo "ponte" verso l'algebra lineare: la misura trasforma grandezze in numeri, **preservando la struttura di monoide additivo**.

Osservazione: m_u non è suriettivo su tutto $\mathbb{R}_{\geq 0}$ se ci si limita a suddivisioni finite, ma lo diventa con l'assioma di continuità (Dedekind). Qui si innesta la costruzione di $\mathbb{R}$.

3. La distanza come funzione su un campo: il caso $\mathbb{R}$

Ora cambiamo livello. Non stiamo più sommando grandezze, ma stiamo **confrontando punti** di uno spazio.

Su $\mathbb{R}$ (campo ordinato completo) la distanza è

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d(x, y) := |x - y|.$$

Qui entrano in gioco **tutte** le operazioni del campo:

- la **somma** $x + y$;
- l'**opposto** $-x$ (che esiste perché $\mathbb{R}$ è un gruppo additivo);
- quindi la **sottrazione** $x - y := x + (-y)$, che ora è totale;

- il **valore assoluto**, che usa l'ordine e l'opposto.

Differenza strutturale rispetto a $\mathcal{G}$:

	Grandezze $\mathcal{G}$	Campo $\mathbb{R}$
Struttura additiva	monoide cancellativo	gruppo abeliano
Opposto	non esiste	esiste sempre
Sottrazione	non definita	totale
Prodotto	non definito (in generale)	definito (campo)
Ordine	totale, compatibile con $+$	totale, compatibile con $+$ e $\cdot$
Completezza	assioma di continuità	assioma di Dedekind

Quindi: la formula $d(x,y) = |x - y|$ richiede la **struttura di campo ordinato**, non solo di monoide. Il valore assoluto "recupera" la simmetria che la sottrazione (asimmetrica) non ha.

4. La distanza su uno spazio vettoriale: il caso $\mathbb{R}^n$

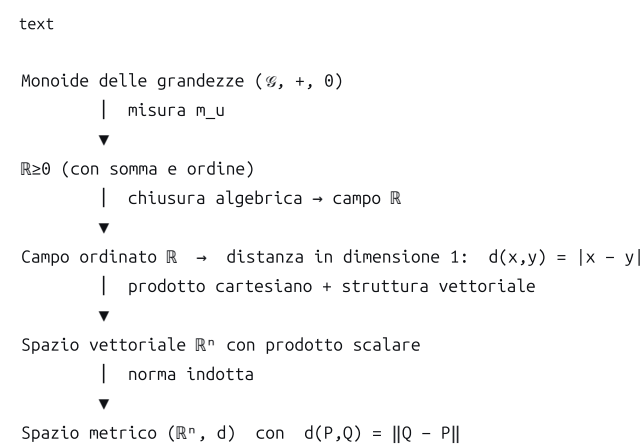
Salendo di dimensione, $\mathbb{R}^n$ è:

- un **gruppo abeliano** rispetto alla somma vettoriale;
- uno **spazio vettoriale** su $\mathbb{R}$ (con prodotto per scalare);
- dotato di **prodotto scalare** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e **norma** $\| \cdot \|$.

La distanza è indotta dalla norma:

$$d(P,Q) := \|Q - P\| = \sqrt{\langle Q - P, Q - P \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}.$$

Gerarchia delle strutture necessarie:



Ogni passaggio aggiunge struttura:

- $\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$: si aggiungono opposti, prodotto, completezza;
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$: si aggiunge la struttura vettoriale e il prodotto scalare;
- $\mathbb{R}^n \rightarrow$ spazio metrico: si aggiunge la nozione di distanza come funzione a valori in $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

5. Perché la distanza non può vivere sul monoide delle grandezze

Questo è il punto concettuale centrale della tua osservazione. Proviamo a definire la distanza direttamente su $\mathcal{G}$:

- Vorremmo $d(g, h) \in \mathcal{G}$ (una grandezza), non un numero.
- Vorremmo $d(g, h) = 0 \iff g = h$.
- Vorremmo $d(g, h) = d(h, g)$.

Ma per definire $d(g, h)$ come "differenza" di grandezze, avremmo bisogno di **sottrarre** h da g — operazione **non disponibile** in $\mathcal{G}$.

Due strade possibili:

(a) Definizione per casi (come in $\mathbb{N}$). Se $g \geq h$, si può parlare di "grandezza complementare" $g - h$ (l'unica k con $h + k = g$). Allora

$$d(g, h) := \begin{cases} g - h & \text{se } g \geq h \\ h - g & \text{se } h \geq g \end{cases}$$

Questa è una **distanza a valori in $\mathcal{G}$** , definita per casi, senza uscire dal monoide. È esattamente l'analogo di quanto fatto in $\mathbb{N}$.

(b) Passaggio ai numeri. Si applica la misura m_u e si definisce

$$d(g, h) := |m_u(g) - m_u(h)| \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Qui la distanza è **numerica**, e vive in $\mathbb{R}$, non in $\mathcal{G}$.

La strada (a) mantiene la distanza "assoluta" (una grandezza); la strada (b) la rende "relativa" (un numero dipendente dall'unità). **Sono due nozioni diverse ma collegate dall'omomorfismo m_u .**

6. Quadro riassuntivo delle strutture

Livello	Struttura algebrica	Operazioni disponibili	Distanza	
Grandezze $\mathcal{G}$	monoide commutativo cancellativo	$+$, 0 , ordine, suddivisione	per casi, a valori in $\mathcal{G}$	
Misura	omomorfismo $m_u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$	$+$, ordine	\$	m_u
Campo $\mathbb{R}$	campo ordinato completo	$+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\ \cdot\ $	\$	$x - y$
Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$	spazio vettoriale euclideo	$+$, $-$ (vettoriale), $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\ \cdot\ $	$\ Q - P\ $	
Spazio metrico (X, d)	insieme + funzione d	solo d	assiomatica	

7. Conseguenze didattiche

1. **Far vedere che la sottrazione è un lusso.** Nei naturali e nelle grandezze non c'è; va costruita o aggirata con il confronto.
2. **Distinguere "grandezza" da "numero".** La lunghezza è una grandezza; la sua misura è un numero. La distanza geometrica è una grandezza; la distanza cartesiana è un numero.
3. **Il valore assoluto è il prezzo da pagare** per avere una formula unica e simmetrica in $\mathbb{R}$: sostituisce la definizione per casi, ma richiede l'opposto.
4. **In $\mathbb{R}^n$ la norma generalizza il valore assoluto:** $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ è l'analogo di $|t| = \sqrt{t^2}$.

5. Il **monoide delle grandezze** è il **punto di partenza**, non di arrivo: la struttura ricca (campo, spazio vettoriale) si costruisce *dopo*, per poter parlare di distanza in modo algebricamente comodo.

8. Una formulazione sintetica

Le **grandezze** formano un **monoide commutativo cancellativo** $(\mathcal{G}, +, 0)$: si sommano, si confrontano, si suddividono, ma non si sottraggono.

La **misura** rispetto a un'unità u è un omomorfismo iniettivo $m_u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ che permette di tradurre le grandezze in numeri.

La **distanza** in $\mathbb{R}$ è una funzione $d(x, y) = |x - y|$ che richiede la struttura di **campo ordinato** (per avere opposti, sottrazione totale, valore assoluto).

La **distanza** in $\mathbb{R}^n$ è una funzione $d(P, Q) = \|Q - P\|$ che richiede la struttura di **spazio vettoriale euclideo** (per avere differenza vettoriale e norma).

Il legame tra i due mondi è la **scelta di coordinate isometriche**: essa garantisce che il numero $d(P, Q)$ calcolato algebricamente coincida con la misura m_u della lunghezza geometrica PQ .

Vuoi che approfondisca:

- la costruzione esplicita di $\mathbb{R}$ a partire dal monoide delle grandezze (via classi di equivalenza o sezioni di Dedekind)?
- il concetto di **spazio metrico assiomatico** (X, d) come generalizzazione ultima, che rinuncia persino alla struttura vettoriale?
- il ruolo della **norma** e il passaggio da norma a distanza (e viceversa, quando è possibile)?

Quale titolo proponi?

Proposta di titolo

Dipende dal **taglio** che vuoi dare al percorso e dal **destinatario** (studenti del triennio, colleghi, pubblicazione didattica). Ti propongo alcune opzioni organizzate per stile.

1. Titoli che mettono al centro il *legame* (il filo conduttore del percorso)

- Dalla grandezza alla coordinata: la distanza come ponte tra geometria e algebra
- La distanza: dalla misura delle lunghezze alle coordinate cartesiane
- Misurare, confrontare, calcolare: un percorso sulla distanza
- Dalla lunghezza al numero: genesi e struttura della distanza

2. Titoli che mettono al centro la *struttura algebrica* (il tuo ultimo approfondimento)

- Grandezze, monoidi e spazi metrici: la distanza tra algebra e geometria
- Dal monoide delle grandezze allo spazio vettoriale: un itinerario sulla distanza
- La distanza come funzione: strutture algebriche sottostanti

- Monoide, campo, spazio vettoriale: tre livelli per la distanza

3. Titoli di *taglio didattico* (per una scheda o un'unità di apprendimento)

- La distanza: un'unità didattica dalla geometria elementare alle coordinate
- Capire la distanza: dagli enti primitivi alla formula cartesiana
- Un percorso sulla distanza per il triennio del liceo
- Distanza: significato geometrico e traduzione algebrica

4. Titoli *sintetici e incisivi*

- La distanza: misura, coordinate, struttura
- Distanza: dal segmento alla formula
- Che cos'è la distanza? Un percorso in tre tappe
- La distanza: geometria, numeri, algebra

5. Il titolo che sceglierei (se dovessi consigliartene uno)

Se il percorso è quello che abbiamo costruito — che parte dagli enti primitivi, passa per il monoide delle grandezze, arriva alle coordinate isometriche e si apre alla struttura di spazio metrico — il titolo che meglio sintetizza tutto è:

La distanza: dalla grandezza alla struttura

Un percorso tra geometria, coordinate e algebra

È breve, dice il *movimento* (dalla grandezza alla struttura), copre i tre livelli (geometria, coordinate, algebra) e funziona sia come titolo di una scheda didattica sia come titolo di un capitolo o di un articolo.

Se mi dici il **contesto d'uso** (scheda per studenti, relazione per un corso, capitolo di dispensa, articolo per una rivista didattica) e il **pubblico** (biennio, triennio, formazione insegnanti), posso raffinare ulteriormente il titolo e proporre anche un **sottotitolo** e una **struttura in sezioni**.