

Insiemi e corrispondenze.

Linguaggio degli insiemi.

- **Durata indicativa:** 2 ore (articolabile in due lezioni da 1 ora)
- **Prerequisiti:** Nozioni fondamentali di insiemistica del biennio

Obiettivi della lezione

- Ripassare il linguaggio formale e le notazioni degli insiemi
- Saper rappresentare insiemi e loro operazioni con i diagrammi di Eulero-Venn
- Comprendere il concetto di corrispondenza tra due insiemi
- Saper costruire e rappresentare, ovvero disegnare, una corrispondenza con i diagrammi di Eulero-Venn
- Definizione di corrispondenze univoca
- Definizione di funzione
- Definizioni di corrispondenze iniettive, suriettive e biunivoche

1. Ripasso del linguaggio degli insiemi (≈25 min)

Notazioni fondamentali

Simbolo	Significato formale	Lettura operativa
$x \in A$	x appartiene ad A	L'elemento fa parte dell'insieme
$x \notin A$	x non appartiene ad A	L'elemento non appartiene all'insieme
$A \subseteq B$	$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$	A è sottoinsieme di B (inclusione debole, può essere $A = B$)
$A \subset B$	$A \subseteq B \wedge A \neq B$	A è sottoinsieme proprio di B (esiste almeno un elemento in B non in A)
$\emptyset$	$\{x \mid x \neq x\}$	Insieme vuoto (privo di elementi)
$A = \{x \mid P(x)\}$	Insieme per proprietà caratteristica	Contiene tutti e soli gli elementi che verificano la proprietà $P(x)$
$\overline{A} \text{ (o } C_U(A))$	$\{x \in U \mid x \notin A\}$	Complementare di A rispetto all'insieme universo U

Modi di rappresentare un insieme

- **Elencazione (o forma estensiva):** $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- **Proprietà caratteristica (o forma intensiva/comprendione):** $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$
- **Diagramma di Eulero-Venn:** Rappresentazione grafica su regione chiusa del piano (cfr. punto 2).

Operazioni tra insiemi da ripassare

- **Unione:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- **Intersezione:** $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

- **Differenza:** $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Complementare (rispetto all'universo U):** $\bar{A} = U - A = \{x \in U \mid x \notin A\}$
- **Insiemi disgiunti:** Due insiemi si dicono disgiunti se non hanno elementi in comune: $A \cap B = \emptyset$.

Esempio guida per la classe:

Siano $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

→ Richiesta agli studenti: determinare analiticamente $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $A - B$.

2. Rappresentazione con i diagrammi di Eulero-Venn (≈15 min)

Linee guida geometrico-grafiche per la lavagna:

- Ogni insieme è delimitato da una curva chiusa semplice del piano (usualmente cerchio o ellisse).
- L'insieme universo U viene tradizionalmente racchiuso da un rettangolo che contiene tutti gli insiemi considerati.
- Gli elementi sono individuati puntualmente all'interno delle rispettive regioni.

Configurazioni topologiche da visualizzare alla lavagna:

- Due insiemi disgiunti (nessuna regione di sovrapposizione: $A \cap B = \emptyset$)
- Due insiemi con intersezione propria (regione comune parziale: $A \cap B \neq \emptyset$)
- Inclusione stretta di un insieme nell'altro (cerchio interno: $A \subset B$)
- Insiemi coincidenti (le curve delimitatrici si sovrappongono esattamente: $A = B$)

Attività operativa: Far disegnare sul quaderno le configurazioni grafiche dell'esempio guida precedente colorando con campiture differenti $A \cup B$, $A \cap B$ e il complementare $\bar{A}$.

3. Insiemi e corrispondenze (≈40 min)

Costruzione e definizione formale

Una corrispondenza per noi è un concetto primitivo e quindi non ha definizione.

Possiamo dire come dare una corrispondenza:

- **1. Dare due insiemi A e B**
- **2. Darli in modo ordinato**
- **3. Dare una legge o regola** che associa elementi di A a elementi di B.

Rappresentazione mediante diagrammi di Eulero-Venn di una corrispondenza

Corrispondenze univoche

Definizione: Una corrispondenza $\mathcal{R}: A \rightarrow B$ si dice **univoca** se a ogni elemento di A è associato al massimo un elemento di B (cioè 0 oppure 1 elemento, mai 2 o più).

Nell'esempio precedente la corrispondenza non è univoca. Per renderla univoca è sufficiente rimuovere la coppia (1, b).

Esempi tratti dal contesto reale:

- $A = \{\text{studenti della classe}\}$, $B = \{\text{mesi dell'anno}\}$, $\mathcal{R} = \text{'è nato nel mese di...'}: \text{È UNIVOCA (ogni studente possiede un unico mese di nascita).}$
- $A = \{\text{mesi dell'anno}\}$, $B = \{\text{studenti della classe}\}$, $\mathcal{R} = \text{'è il mese di nascita di...'}: \text{NON È UNIVOCA (allo stesso mese possono corrispondere più studenti).}$

4. Definizione di funzione (≈15 min)

Definizione formale: Una corrispondenza $f: A \rightarrow B$ si definisce **funzione** (o applicazione) se è univoca e definita ovunque su A : a ogni elemento di A corrisponde uno ed un solo elemento di B .

In simboli matematici: $\forall a \in A, \exists ! b \in B \text{ tale che } b = f(a)$

- **Dominio:** L'insieme di partenza A su cui la funzione è interamente definita.
- **Codominio:** L'insieme di arrivo dichiarato B .
- **Insieme Immagine (o codominio effettivo):** Il sottoinsieme del codominio costituito dagli elementi effettivamente raggiunti da almeno una freccia: $\text{Im}(f) = f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\} \subseteq B$.

Esempio: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \mathbb{N}$, con $f(x) = x^2$. È una funzione valida: ogni elemento di A genera una e una sola immagine: $f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=9$, $f(4)=16$.

Controesempio didattico: $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, con relazione $\mathcal{R}: 'y \text{ tale che } y^2 = x'$. Non è una funzione per due distinte violazioni:

- Per ogni $x > 0$ esistono due valori associati ($y = \pm\sqrt{x}$), violando l'univocità;
- Per ogni $x < 0$ non esiste alcun valore reale associato, violando la condizione di esistenza (non è definita ovunque).

5. Funzioni suriettive, iniettive e biunivoche (≈25 min)

Le tre proprietà fondamentali qualificano il comportamento delle immagini nel codominio:

- **Funzione Iniettiva:**
Ogni elemento del secondo insieme è immagine di al più un elemento del primo insieme.
Ogni elemento del secondo insieme è immagine di uno o nessun elemento del primo insieme.
Elementi distinti del dominio hanno immagini distinte nel codominio:
 $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ [o contronominale: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$]
(Nessun elemento di B è immagine, riceve più di una freccia: al massimo 1 freccia entrante).
- **Funzione Suriettiva:** Ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio, ovvero $\text{Im}(f) = B$:
 $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$
(Nessun elemento di B resta scoperto: almeno 1 freccia entrante per ciascun $b \in B$).
- **Funzione Biunivoca (o Biiettiva):** Una funzione è biunivoca se è contemporaneamente sia iniettiva sia suriettiva.
(Ogni elemento di B riceve esattamente 1 sola freccia: corrispondenza uno-a-uno perfetta ed invertibile).

Quadro sinottico riassuntivo (Regola visiva delle frecce)

Tipologia	Frecce uscenti da ogni $a \in A$	Frecce entranti per ogni $b \in B$	Traduzione logica
Funzione generica	Esattamente 1	0, 1 o più	$\forall a \in A, \exists ! b \in B : f(a) = b$

Iniettiva	Esattamente 1	Al massimo 1 (≤ 1)	$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
Suriettiva	Esattamente 1	Almeno 1 (≥ 1)	$\text{Im}(f) = B$
Biunivoca (Biiettiva)	Esattamente 1	Esattamente 1 ($= 1$)	Biiettiva ed invertibile

Esempi classici di confronto

- **$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con $f(x) = x + 1$:** Iniettiva ma non suriettiva (l'elemento $0 \in \mathbb{N}$ non è immagine di alcun naturale).
- **$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ con $f(x) = |x|$:** Suriettiva ma non iniettiva (es. $f(-2) = f(2) = 2$).
- **$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = 2x + 3$:** Biunivoca (ogni retta non verticale né orizzontale definisce una biiezione su $\mathbb{R}$).
- **$f: A = \{1, 2, 3\} \rightarrow B = \{a, b\}$:** Mai iniettiva, per il Principio dei Cassetti (Dirichlet): 3 elementi su 2 bersagli impongono almeno una collisione.

Verifica rapida di fine lezione

1. Dati $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, costruire una corrispondenza da A a B che sia una funzione iniettiva ma non suriettiva.
2. Dati i medesimi insiemi A e B, è possibile costruire una funzione suriettiva da A a B? Motivare rigorosamente la risposta (cardinalità degli insiemi finiti).
3. Stabilire se la funzione $f(x) = x^2$ definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è iniettiva, suriettiva o biunivoca. Come mutano le sue proprietà se restringiamo dominio e codominio a $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$?
4. Rappresentare mediante diagramma sagittale una corrispondenza univoca che NON sia una funzione (cioè non definita ovunque), commentando l'anomalia.

Note e raccordo per la Lezione 2

Punti di ripartenza didattica naturale:

- Invertibilità e funzione inversa (necessità e sufficienza della biunivocità);
- Composizione di funzioni $f \circ g$ e proprietà del dominio di composizione;
- Funzioni reali di variabile reale, studio del grafico qualitativo e test geometrico delle rette orizzontali/verticali.